TD3 – Recherche opérationnelle

Yann.Esposito@lif.univ-mrs.fr

9 février 2006

1 Production d'acier

Matière première	A	B	C	quantité maximale
Fer	2	1	2	30
Houille	1	3	2	60
Prix de vente	3	4	2	

1.1. déterminer la production journalière maximisant le prix de vente.

Les étapes :

1. Modélisation du problème sous forme canonique ;
2. Diagonalisation de la matrice ;
3. Calcul de l'ensemble des solutions, rendu sous la forme d'un vecteur paramétré et dons les paramètres sont eux-même contraints de manière indépendante ;
4. calcul de la meilleure solution ;

Modélisation :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \max(3A + 4B + 2C)$$

Diagonalisation de la matrice :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} x &\leq \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix} \\ &\Updownarrow (L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1) \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} x &\leq \begin{bmatrix} 30 \\ 90 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calcul de l'ensemble des solutions :

$$\begin{aligned} 5B + 2C &\leq 90 \\ B &\leq 18 - {}^{2}\!/_{5}C \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} 2A + B + 2C &\leq 30 \\ A &\leq (30 - B - C)/2 \\ A &\leq 15 - 9 + {}^{1}\!/_{5}C - {}^{1}\!/_{2}C \\ A &\leq -{}^{3}\!/_{10}C + 6 \end{aligned}$$

Des contraintes : $A, B, C \geq 0$ on déduit :

$$\begin{array}{r|r|r} A \geq 0 & B \geq 0 & \\ -{}^{3}\!/_{10}C + 6 \geq 0 & -{}^{2}\!/_{5}C + 18 \geq 0 & C \geq 0 \\ C \leq 20 & C \leq 45 & \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -{}^{3}\!/_{10}C + 6 \\ -{}^{2}\!/_{5}C + 18 \\ C \end{bmatrix}, \text{ avec } C \in [0; 20] \right\}$$

La fonction à maximiser est $3A + 4B + 2C$. Comme toutes les variables ont des coëficients positifs, il est évident que la solution est sur l'arête. Il suffit donc de vérifier s'il faut minimiser ou maximiser C :

$$\begin{aligned} 3A + 4B + 2C &= \\ 3(-{}^{3}\!/_{10}C + 6) + 4(-{}^{2}\!/_{5}C + 18) + 2C &= \\ -{}^{1}\!/_{2}C + 90 &= \end{aligned}$$

Pour maximisier $3A+4B+2C$ il faut donc minimiser C. La meilleure solution est donc celle obtenue pour $C = 0$:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2. L'aciérie doit limiter sa consommation d'énergie à 20000 unités par jour. n'énergie nécessaire par tonne d'acier (de tout type) est de 1000 unités. Trouver une nouvelle répartition de la production en utilisant la solution précédente.

La modélisation de la nouvelle contrainte donne :

$$\begin{gathered} 1000A + 1000B + 1000C \leq 20000 \\ \Updownarrow \\ A + B + C \leq 20 \end{gathered}$$

dans matrice de départ. On constate que cette contrainte interdit d'utiliser la solution précédente.

(la suite au prochain numéro)

2 affectation de bobines

L'idée centrale est d'utiliser des variables booléennes :

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{la bobine } i \text{ dans le four } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ensuite il faut entrer des contraintes de cohérences :

- $\forall i, \sum_j x_{i,j} \leq 1$; la bobine va au plus dans un seul four ;

Puis les contraintes du problème :
- $\forall j, \sum_i h_i x_{i,j} \leq H$; la somme des hauteurs des bobines dans le four j n'exède pas H.
- $\forall j, \forall i, t_i x_{i,j} \leq T_j$; le temps de cuisson de chaque bobine n'excède pas le temps de cuisson du four (introduction des variables T_j) ;

Nous introduisons alors les variables T_j qui sont des valeurs réelles positives.
La fonction à minimiser est :

$$\min \left(\sum_j \left(HT_j - \sum_i h_i t_i x_{i,j} \right) \right)$$

❦