TD4 – Recherche opérationnelle

Yann.Esposito@lif.univ-mrs.fr

16 février 2006

1 Affectation de bureaux

Un organisme va emmenager dans de nouveaux locaux. Ceux-ci se composent de n bureaux identiques alignés du même coté du couloir avec les portes au centre du mur adjacent au couloir. L'organisme a effectué dans les anciens locaux des statistiquessur les va-et-vients entre les n services à installer dans les n bureaux et $c_{i,j}$ est le nombre de fois où des employés du service i vont dans le service j.

Modélisez le problème qui consiste à placer les services dans les bureaux de manière à minimiser la somme des distances parcourues par les employés.

La modélisation qui vient naturellement est celle-ci : Les variables :

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si le service } i \text{ est affecté au bureau } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les contraintes de cohérence :
- $\forall i, \sum_j x_{i,j} = 1$, chaque service dans un seul bureau ;
- $\forall j, \sum_i x_{i,j} = 1$, chaque bureau est affecté à un seul service ;

La fonction à optimiser :

$$\min \left(\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l x_{i,j} x_{k,l} |j-l| c_{i,k} \right)$$

Or cette fonction n'est pas linéaire. Il faut alors trouver une autre modélisation qui permette de n'utiliser que des formules linéaires. Remarquons que toutes les formules sont non linéaires à cause des termes $x_{i,j}x_{k,l}$. Il est alors naturel d'utiliser les variables booléennes :

$$x_{i,j}^{k,l} = x_{i,j} x_{k,l}$$

Les contraintes deviennent alors :
- $\forall i, \forall k \neq i, \sum_j \sum_{l \neq j} x_{i,j}^{k,l} = 1$, chaque couple de service est situé dans un couple de bureaux ;
- $\forall j, \forall l, \sum_i \sum_k x_{i,j}^{k,l} = 1$, chaque couple de bureaux est affecté à un seul couple de services ;

La fonction à optimiser devient alors linéaire :

$$\min \left(\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l x_{i,j}^{k,l} |j-l| c_{i,k} \right)$$

2 Le problème des transbordements

2.1. Le coût du transport est : $5 \times 40 + 2 \times 20 = 240$

2.2. Oui la stratégie est optimale car AC est le plus court chemin de (A ou F) vers C et FD est le plus court chemin de (A ou F) vers D.

2.3. Modélisation du problème

La seule difficulté de la modélisation est l'astuce qui permet de simuler les transports d'aspirateur à travers des nœuds déjà fournis (la troisième contrainte).

- **Les variables** ; les inconnues à calculer sont les valeurs portées par les arêtes : $x_{i,j}$ est le nombre d'aspirateurs transporté de i vers j ;
- **les contraintes** ;
  1. pour tous les couples i, j qui ne correpondent pas à un arc, on ajoute les contraintes : $x_{i,j} = 0$. Par exemple $x_{A,D} = 0$;
  2. On ne peut pas envoyer plus d'aspirateurs que dans les stocks : $x_{A,j} \leq S_A$, $x_{F,j} \leq S_F$;
  3. Le nombre d'aspirateur qui arrive dans un lieu moins le nombre d'aspirateurs qui sort d'un lieu est supérieur à la demande des clients dans ce lieu :

$$\forall j, \sum_i x_{i,j} - \sum_i x_{j,i} \geq Q_j$$

- **la fonction à optimiser** :

$$\min \left(\sum_i \sum_j c_{i,j} x_{i,j} \right)$$

  où $c_{i,j}$ est le cout du transport de i vers j.

❦